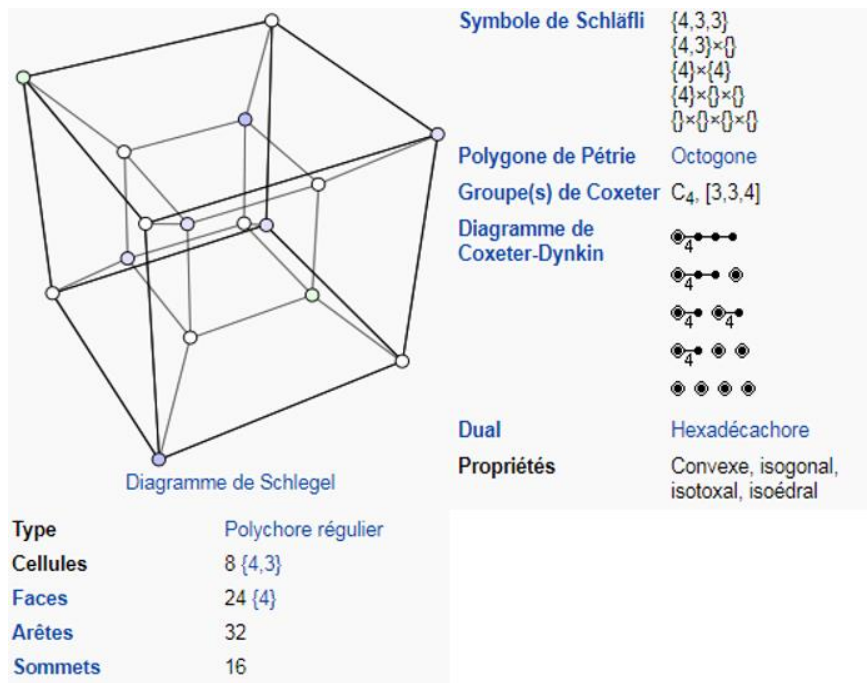


## Tesseract l'hypercube quadridimensionnel

En géométrie, le tesseract, aussi appelé 8-cellules ou octachore, est l'analogue quadridimensionnel du cube (tri-dimensionnel), où le mouvement le long de la quatrième dimension est souvent une représentation pour des transformations liées du cube à travers le temps. Le tesseract est au cube ce que le cube est au carré ; ou, plus formellement, le tesseract peut être décrit comme un 4-polytope régulier convexe dont les frontières sont constituées par huit cellules cubiques.

Une généralisation du cube aux dimensions plus grandes que trois est appelée un « hypercube », « n-cube » ou « polytope de mesure ». Le tesseract est l'hypercube quadridimensionnel ou 4-cube. C'est un polytope régulier. C'est aussi un cas particulier de parallélotope : un hypercube est un parallélotope droit dont les arêtes sont de même longueur. Selon l'Oxford English Dictionary, le mot « tesseract » a été conçu et utilisé pour la première fois en 1888 par Charles Howard Hinton dans son livre *A New Era of Thought* (en), à partir du  $\tau\epsilon\sigma\sigma\epsilon\rho\epsilon\varsigma$   $\alpha\kappa\tau\iota\nu\epsilon\varsigma$  (« quatre rayons ») ionique grec, faisant référence aux quatre segments de droites à partir de chaque sommet vers les autres sommets. De manière alternative, d'autres personnes ont appelé la même figure un « tétracube ».



### Géométrie

Le tesseract standard en 4-espace euclidien est donné par l'enveloppe convexe des points  $(\pm 1, \pm 1, \pm 1, \pm 1)$ . C'est-à-dire qu'il est constitué des points :

$$\{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid -1 \leq x_i \leq 1\}$$

Un tesseract est limité par huit hyperplans ( $x_i = \pm 1$ ). Chaque paire d'hyperplans non-parallèles se coupent pour former 24 faces carrées dans un tesseract. Trois cubes et trois carrés se coupent à chaque arête. Il existe quatre cubes et six arêtes qui se rencontrent à chaque sommet. Au total, il est constitué de 8 cubes, 24 carrés, 32 arêtes et 16 sommets.

Puisque chaque sommet d'un tesseract est adjacent à quatre arêtes, la figure de sommet d'un tesseract est un tétraèdre régulier. Ainsi, le tesseract est donné par le symbole de Schläfli  $\{4,3,3\}$ . Le polytope dual du tesseract est appelé l'hexadécachore ou 16-cellules, avec le symbole de Schläfli  $\{3,3,4\}$ .

### Projections en 2 dimensions

La construction d'un hypercube peut être imaginée de la manière suivante :

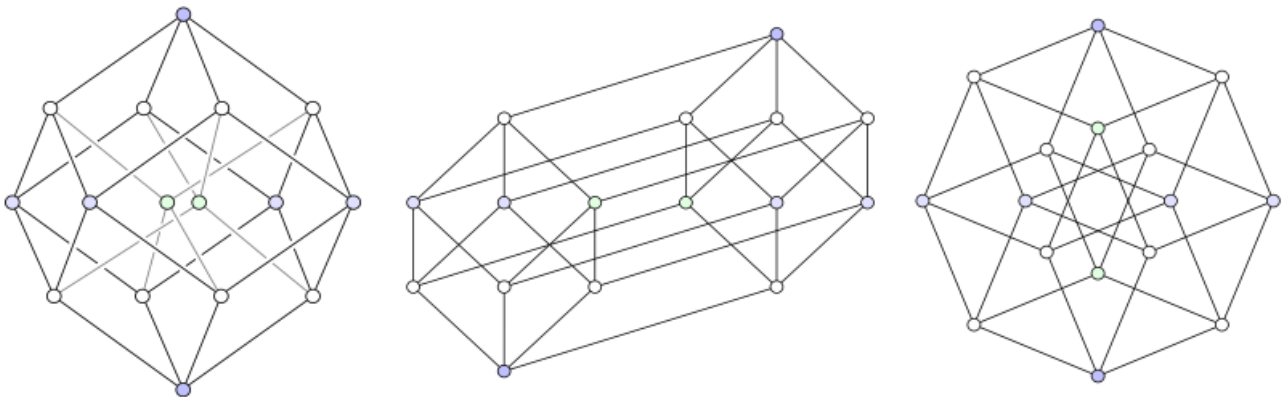
1-dimension : Deux points A et B peuvent être connectés en un segment [AB].

2-dimensions : Deux segments parallèles [AB] et [CD] peuvent être connectés pour devenir un carré, avec les coins marqués ABCD.

3-dimensions : Deux carrés parallèles ABCD et EFGH peuvent être connectés pour devenir un cube, avec les coins marqués ABCDEFGH.

4-dimensions : Deux cubes parallèles ABCDEFGH et IJKLMNOP peuvent être connectés pour devenir un hypercube, avec les coins marqués ABCDEFGHIJKLMNOP.

Cette structure n'est pas aisée à imaginer mais il est possible de projeter des tesseracts dans des espaces tri ou bi-dimensionnels. En outre, les projections sur un plan bidimensionnel deviennent plus instructives en réarrangeant les positions des points projetés. De cette manière, on peut obtenir des images qui ne reflètent plus les relations spatiales dans le tesseract, mais qui illustrent la structure de connexion des sommets, comme indiqué dans les exemples suivants :

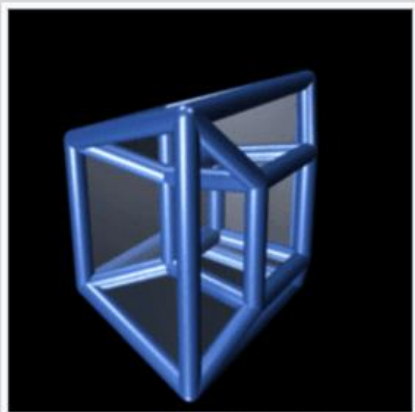


L'illustration sur la gauche montre comment un tesseract est, en principe, obtenu en combinant deux cubes. Le procédé est similaire à la construction d'un cube à partir de deux carrés : Juxtaper deux copies d'un cube de dimension inférieure et connecter les sommets correspondants. Le centre de l'image provient du fait que chaque arête est de la même longueur. Cette image permet aussi au cerveau humain de trouver une multitude de cubes qui sont interconnectés convenablement.

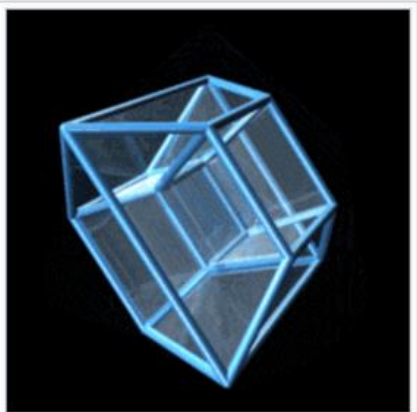
Le diagramme sur la droite ordonne finalement les sommets du tesseract en respectant les distances le long des arêtes, en préservant le point de base. Cette vue est intéressante lorsque l'on utilise des tesseracts comme base pour une topologie de réseau pour brancher des processeurs multiples en informatique parallèle : la distance entre deux nœuds est au plus 4 et il existe beaucoup de chemins différents pour permettre un balancement pondéral.

Le motif de connexion des sommets du tesseract est le même qu'une rangée de carrés 4x4 dessinés sur un tore ; chaque cellule (représentant un sommet du tesseract) est adjacente à exactement quatre autres cellules<sup>1</sup>. Les tesseracts sont aussi des graphes bipartis, comme l'est un chemin, un carré, un cube et un arbre.

## Projections en 3 dimensions



Une projection 3D d'un 8-cellules exécutant une rotation simple sur un plan qui coupe la figure à partir de l'avant-gauche vers l'arrière-droit et du haut vers le bas.



Une projection 3D d'un 8-cellules exécutant une double rotation sur deux plans orthogonaux.

Une projection 3D d'un 8-cellules exécutant une rotation simple sur un plan qui coupe la figure à partir de l'avant-gauche vers l'arrière-droit et du haut vers le bas.

Une projection 3D d'un 8-cellules exécutant une double rotation sur deux plans orthogonaux.

La projection parallèle cellule en premier du tesseract dans un espace tridimensionnel a une enveloppe cubique. Les cellules les plus proches et les plus éloignées sont projetées sur le cube, et les 6 cellules restantes sont projetées sur les 6 faces carrées du cube.

La projection parallèle face en premier du tesseract dans un espace tridimensionnel a une enveloppe cuboïdale. Deux paires de cellules sont projetées vers les moitiés supérieures et inférieures de cette enveloppe, et les 4 cellules restantes sont projetées vers les faces de côté.

La projection parallèle arête en premier du tesseract dans un espace tridimensionnel a une enveloppe de la forme d'un prisme hexagonal. Les 8 cellules sont projetées sur les volumes de la forme de prismes parallélogrammique, qui sont disposés dans le prisme hexagonal d'une manière analogue à la disposition des faces sur une projection de cube 3D sur 6 parallélogrammes dans une enveloppe hexagonale sous une projection sommet en premier.

La projection parallèle sommet en premier du tesseract dans un espace tridimensionnel a une enveloppe en forme de dodécaèdre rhombique. Il existe exactement deux manières de décomposer un dodécaèdre rhombique en 4 parallélépipèdes congrus, donnant un total de 8 parallélépipèdes possibles. Les images des cellules du tesseract sous cette projection sont précisément ces 8 parallélépipèdes. Cette projection est aussi celle qui a le volume maximal.

## Développement du tesseract

Le tesseract peut être développé en huit cubes, comme le cube peut être développé en six carrés. Le développement d'un polyèdre est appelé un patron. Il existe 261 patrons distincts du tesseract [archive] (voir la figure adjacente pour un exemple d'un de ces 261 patrons). Les développements des tesseracts peuvent être comptés en appliquant les patrons sur des arbres avec paires (un arbre mis avec une coïncidence parfaite dans son complémentaire).

## Dans l'art et la littérature

Le Tesseract est le titre d'une nouvelle de Jean Ray parue en 1961 dans *Les Cahiers de la Biloque*, revue belge d'humanisme médical, et reprise par Marabout en 1964 dans son recueil *Le Carrousel des maléfices* rassemblant dix-neuf nouvelles de Jean Ray.

Dans le roman d'Edwin Abbott *Flatland*, un hypercube est imaginé par le narrateur.

Dans la musique, Tesseract est le nom d'un groupe de metal progressif.

Robert A. Heinlein a mentionné les hypercubes dans au moins trois de ses histoires de science-fiction. Dans *La Maison biscornue* (1941), il décrit une maison construite comme un patron (un développement de cellules dans un espace tri-dimensionnel) d'un tesseract. Elle s'effondra, devenant un tesseract réel. Le roman d'Heinlein de 1963 *Route de la gloire* inclut le *foldbox*, une caisse d'emballage hyperdimensionnelle qui est plus grande à l'intérieur qu'à l'extérieur.

Un hypercube est utilisé comme le *deus ex machina* principal du livre de Robert J. Sawyer *Factoring Humanity*, apparaissant même sur la couverture Nord-Américaine.

Le tesseract est mentionné dans le roman fantasy pour enfant *A Wrinkle in Time* (en), par Madeleine L'Engle, comme une manière d'introduire le concept de dimensions plus élevées, mais la description correspond plus à un trou noir.

La peinture *Crucifixion (Corpus Hypercubus)*, par Salvador Dalí, 1954, décrit un Jésus crucifié sur le patron d'un hypercube. Il est exposé au Metropolitan Museum of Art à New York, USA.

Le film *Cube 2: Hypercube* se concentre sur huit étrangers piégés dans un réseau de cubes connectés, ceux-ci ayant des propriétés spatio-temporelles différentes et formant un hypercube.

Dans la *Saga Vorkosigan* de Lois McMaster Bujold, les parents de Miles Vorkosigan, Aral et Cordelia, comparent à un tesseract la personnalité de leur fils.

Les hypercubes et toutes les sortes d'espaces multidimensionnels et les structures tiennent le premier rôle dans beaucoup de livres de Rudy Rucker.

Les Tesseract Books étaient un éditeur important de livres de science fiction canadien.

Le pavillon Imax 3D Dynamique du Futuroscope est une projection géante en trois dimensions d'un tesseract de 35 mètres de côté.

L'un des pavillons du Futuroscope est une projection géante d'un tesseract.

Dans l'univers de fiction des films de la licence Marvel des années 2010, le Tesseract est un objet permettant le voyage transdimensionnel, considéré comme le joyau de la salle des trésors du dieu Odin. Dans le film *Captain America: First Avenger* (Joe Johnston, 2011), les nazis le récupèrent en Norvège, et il tombe au fond de l'océan à la fin du film. Ce même Tesseract est retrouvé à la fin du film *Thor* (Kenneth Branagh, 2011) et sera l'élément principal du film *Avengers* (Joss Whedon, 2012). Le Tesseract est désigné comme "Pierre d'infinité" dans la scène post-générique de *Thor : Le Monde des ténèbres* (2013). Depuis la sortie du film *Les Gardiens de La Galaxie*, on sait que le Tesseract est la « Pierre d'Infinité : Espace ».

Dans le mod *thermal expansion* [archive] du jeu *minecraft* [archive], un tesseract [archive] est un bloc permettant de transporter des blocs, des liquides, ou même de l'énergie à travers différents monde et une distance infinie.

En 2014 dans le film *Interstellar* de Christopher Nolan, le tesseract est utilisé par le héros du film pour communiquer avec sa fille à travers le temps.

L'écran de chargement du jeu vidéo *Fez* figure la projection d'un tesseract en rotation.

## En architecture informatique



En informatique, le terme hypercube fait référence à deux concepts :

Une base multidimensionnelle à des finalités de rapport et d'analyse. Elle se décompose en « dimensions » et en « faits » ; les faits sont les valeurs numériques (typiquement « nombre de ventes »), les dimensions sont les identifiants qui permettent de retrouver les faits dans les cellules de stockage ; on peut ainsi obtenir un « sous-cube » (pas forcément convexe...) comme résultat d'une requête sur un cube et le traiter par union, intersection avec un autre résultat de requête.

un type précis d'ordinateur en calcul parallèle, dont les processeurs, ou les éléments de calcul (PEs), sont interconnectés de la même manière que les sommets d'un hypercube.

Ainsi, un ordinateur hypercube  $n$ -dimensionnel a  $2n$  PEs, chacun directement connecté à  $n$  autres PEs.

Les exemples incluent les machines nCUBE (en) utilisées pour gagner le premier prix Gordon Bell (en), le Caltech Cosmic Cube (en) et la Connection Machine (en), qui utilise la topologie hypercube pour connecter des groupes de processeurs. La société SGI propose à son catalogue des machines avec des réseaux infiniband en topologie hypercube.

<https://fr.wikipedia.org/wiki/Tesseract>